Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

Σ Χ Ο Λ Η   Ε Φ Α Ρ Μ Ο Σ Μ Ε Ν Ω Ν
Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Ω Ν   κ α ι   Φ Υ Σ Ι Κ Ω Ν   Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ω Ν

Τ Ο Μ Ε Α Σ   Φ Υ Σ Ι Κ Η Σ

Κανονική εξέταση στο μάθημα   Φ Υ Σ Ι Κ Η   Ι   8 Φεβρουαρίου 2006

Διδάσκοντες: Λ. Απέκης, Κ. Χριστοδουλίδης

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες   Απαντήστε σε όλα τα θέματα   Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Θέμα 1. Ένα σώμα μάζας *m* κινείται κατά μήκος του άξονα των *x*. Η μοναδική δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα αντιτίθεται στην κίνηση και έχει τιμή $F = -A\upsilon^2 e^{\alpha t}$, όπου *t* είναι ο χρόνος, υ η ταχύτητα του σώματος και α και *A* θετικές σταθερές.

(α) Να βρεθεί η ταχύτητα $\upsilon(t)$ του σώματος συναρτήσει του χρόνου *t*, αν αρχικά ($t = 0$) είναι $\upsilon(0) = \alpha m / A$.

(β) Να βρεθεί η θέση του σώματος, $x(t)$, συναρτήσει του χρόνου *t*, αν αρχικά είναι $x(0) = 0$.

(γ) Δείξετε ότι η δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα είναι ανάλογη της ταχύτητάς του, και βρείτε τον συντελεστή αναλογίας.

(δ) Εκφράστε την κινητική ενέργεια του σώματος συναρτήσει του x.

Θέμα 2. Σώμα μάζας $m = 1$ kg κινείται κατά μήκος του άξονα των x. Η δυναμική του ενέργεια δίνεται από τη συνάρτηση:

$$U(x) = x^2(1 - x^2), \quad (-\infty < x < \infty), \qquad \text{(σε μονάδες SI).}$$

(α) Σχεδιάστε τη συνάρτηση $U(x)$, αναδεικνύοντας μόνο τα κύρια χαρακτηριστικά της.

(β) Να βρεθεί η δύναμη $F(x)$ που ασκείται στο σώμα.. Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας και το είδος της ισορροπίας στο καθένα.

(γ) Να αποδειχθεί ότι για μικρές μετατοπίσεις από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και να υπολογιστεί η γωνιακή συχνότητά της.

(δ) Ποια είναι η ελάχιστη ταχύτητα την οποία πρέπει να έχει το σώμα στη θέση $x = 0$ για να διαφύγει στο άπειρο;

Θέμα 3. (α) Σώμα μάζας *m* κινείται υπό την επίδραση της δύναμης της παγκόσμιας έλξης που του ασκεί άλλο σώμα μάζας *M*, το οποίο βρίσκεται ακίνητο στην αρχή Ο. Να αποδειχθεί ότι η στροφορμή του κινούμενου σώματος ως προς το σημείο Ο είναι σταθερή και ότι η τροχιά του είναι επίπεδη.

(β) Ομογενής ράβδος μάζας *m* και μήκους *l* κρατείται αρχικά κατακόρυφη πάνω σε τραχύ οριζόντιο επίπεδο δάπεδο και κατόπιν αφήνεται να περιστραφεί γύρω από το άκρο της που βρίσκεται στο δάπεδο. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει ολίσθηση, βρείτε τη γωνιακή επιτάχυνση και τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου ως συναρτήσεις της γωνίας θ που αυτή σχηματίζει με την κατακόρυφο. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο σε αυτήν που περνάει από το κέντρο της είναι $I_C = \frac{1}{12}M\ell^2$.

Υπενθυμίζεται ότι $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \dfrac{d\omega}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \omega\dfrac{d\omega}{d\theta}$.

$\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow$

Θέμα 4 (Σχετικότητα). Δέσμη πανομοιότυπων σωματιδίων με την ίδια ταχύτητα παράγεται από επιταχυντή.

(α) Αν κάθε σωματίδιο της δέσμης διατρέχει, μέσα σε ένα σωλήνα, διαδρομή μήκους $\ell = 2400\,\mathrm{m}$ σε χρόνο $\Delta t = 10\,\mu\mathrm{s}$, όπως τον μετρά κάποιος στο σύστημα του εργαστηρίου, να βρεθούν τα μεγέθη β και γ για το σωματίδιο και η διάρκεια $\Delta t'$ της διαδρομής όπως μετράται στο σύστημα των σωματιδίων. Θεωρήστε ότι $c = 3\times 10^8$ m/s.

(β) Αν τα σωματίδια είναι ασταθή, με σταθερά διάσπασης $\lambda = 10^6\ \mathrm{s}^{-1}$, ποιο ποσοστό των σωματιδίων (κατά μέσον όρο) θα φθάσει στο τέλος του σωλήνα; Δίνεται: $e^3 \approx 20$.

(γ) Αν η μάζα ηρεμίας κάθε σωματιδίου είναι m_0, και $m_0 c^2 = 3\,\mathrm{GeV}$, να βρεθεί η κινητική του ενέργεια.

(δ) Να βρεθεί το μέγεθος pc για ένα σωματίδιο, όπου p η ορμή του, και να δοθεί η p σε GeV/c.

Γενικό Τυπολόγιο

$\vec{\mathbf{L}} = M\,\vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{v}}$ $\quad \vec{\mathbf{N}} = \vec{\mathbf{r}}\times\vec{\mathbf{F}}$ $\quad \dfrac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{N}}$ $\quad$ Νόμος της ραδιενεργού διάσπασης: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

Σχετικιστική Κινηματική:

Αν ένα σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $V\,\hat{\mathbf{x}}$ ως προς ένα σύστημα αναφοράς S, και οι άξονες των δύο συστημάτων συμπίπτουν όταν $t = t' = 0$, τότε:

$$x' = \gamma\left(x - Vt\right) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \qquad \beta \equiv \frac{V}{c} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta l = \Delta l_0/\gamma \qquad \Delta t = \gamma\,\Delta t_0 \qquad \upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \frac{\upsilon_x V}{c^2}}, \qquad \upsilon'_y = \frac{\upsilon_y}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon_x V}{c^2}\right)}, \qquad \upsilon'_z = \frac{\upsilon_z}{\gamma\left(1 - \frac{\upsilon_x V}{c^2}\right)}.$$

Σχετικιστική Δυναμική:

$$m_0 = m(0) \qquad m = m(\upsilon) = \gamma m_0 \qquad p = \gamma m_0 \upsilon \qquad E = \gamma m_0 c^2 \qquad E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

Μετασχηματισμός ορμής-ενέργειας:

$$p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{\beta E}{c}\right) \qquad p'_y = p_y \qquad p'_z = p_z \qquad E' = \gamma\left(E - c\beta\,p_x\right)$$

Για φωτόνια: $\quad E = hf = \dfrac{hc}{\lambda} \qquad E = pc$